

# ОБРАЩЕНИЕ К ЧИТАТЕЛЮ

*Дорогие друзья!*

Вот вы и в 5 классе! Вы уже многое знаете и умеете: считать, измерять, решать задачи. Однако впереди вас ждёт ещё очень много нового и интересного.

Мы приглашаем вас в мир чисел. Изучая математику, вы будете развивать свои способности рассуждать, доказывать, обосновывать, преодолевать трудности. Вы научитесь не бояться своих ошибок (ведь «не ошибается тот, кто ничего не делает»).

Вы будете учить математику, одновременно используя учебник, учебные книги, практикумы, рабочие тетради, электронный образовательный ресурс.

*Учебник 5 класса* включает две темы: «Натуральные числа и десятичные дроби» и «Положительные и отрицательные числа». В нём содержатся самые главные определения, объясняются основные правила, разбираются примеры, задаются важные для понимания материала вопросы и предлагаются наиболее полезные для проверки знаний задания. На полях учебника представлены специальные значки, которые помогут вам оценить назначение текста учебника и направят вас на работу с другими учебными материалами:

запомнить важный материал .....

перейти к работе с учебной книгой и практикумом ....

выполнить задания из рабочей тетради .....

выполнить задания по ссылке на Интернет-ресурс .....

подготовить проект в качестве домашнего задания .....

обратить внимание на материал, важный для подготовки к итоговой аттестации .....

проверить свои знания .....



## Обращение к читателю

В тексте учебника *курсивным шрифтом* выделен важный материал, а *наклонным шрифтом* — обращения к ученику.

*Учебные книги* (в 5 классе их две) написаны в виде сюжетных историй. В учебной книге под названием «Натуральные числа и десятичные дроби» действуют сказочные герои: они доброжелательны и любознательны, и только приступают к изучению чисел. Вам отводится роль не только заинтересованных читателей, но и экспертов, которые могут анализировать действия и рассуждения героев с точки зрения математики, радоваться их достижениям и учиться вместе с ними.

Учебная книга «Положительные и отрицательные числа» написана в форме пьесы, каждому из героев которой присущ свой особый способ рассуждать, запоминать и осваивать новое. С их помощью вы сможете познакомиться с разными подходами к изучению математического материала, а также оценить особенности своего собственного стиля мышления.

В *практикумах* вы найдёте разнообразные задания, среди которых есть и очень простые, и трудные, требующие кропотливой работы, и необычные, связанные с поиском нестандартного подхода к решению.

*Рабочие тетради* включают три раздела: «Тренируемся», «Находим закономерности», «Творим и исследуем». Работайте самостоятельно!

*Электронный образовательный ресурс КИТ* («Компетентность. Инициатива. Творчество») на портале [www.school-collection.edu.ru](http://www.school-collection.edu.ru) позволит вам выбрать задания в соответствии с вашими интересами. Он содержит мультфильмы, учебные и развивающие игры, справочники и другие учебные материалы.

Мы уверены, что ваша работа будет успешной и увлекательной! Удачи вам!

*Авторы*

# **НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ**

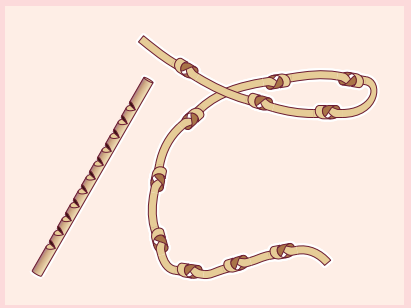
## ГЛАВА 1

# НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ. ИЗМЕРЕНИЕ ВЕЛИЧИН

### § 1. Как люди начали считать

Сейчас мы не можем представить свою жизнь без чисел. Но когда-то очень давно всё было по-другому.

Попробуем мысленно перенестись на двадцать—тридцать тысяч лет назад и представить себе, как люди начинали применять числа.



Охотнику удалось добыть много красивых шкурок, и он захотел обменять их на новые стрелы — по одной стреле за каждую шкурку. Но как объяснить тому, кто делает стрелы, сколько шкурок может предложить охотник? Неужели он должен всегда носить свою добычу с собой?

Итак, нужно было придумать способ, как сохранять и передавать сведения о количестве предметов. И такой способ нашли.



Сначала люди стали использовать подручные средства: делали, например, зарубки на палочке или узелки на ремешке. Наш охотник тоже завязал узелки на кожаном ремешке: сколько шкурок — столько узелков.



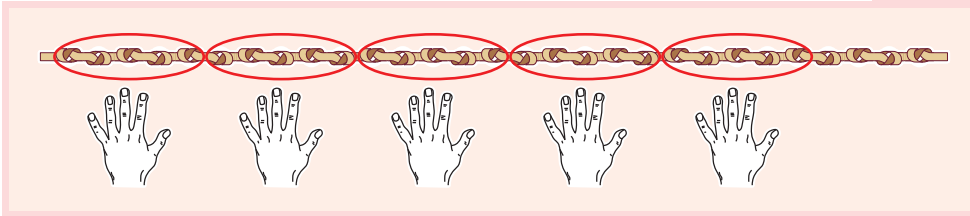
А потом было сделано великое открытие: можно полностью «отделить» сведения о количестве предметов от самих предметов, придумав для этого специальные

слова, а затем и обозначения. В жизнь людей вошли числа и счёт.

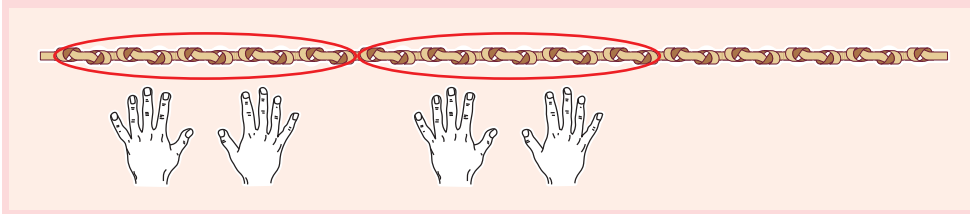
Конечно, такое открытие сделал не какой-то определённый человек, к этой идее постепенно шли разные народы на протяжении тысячелетий.

Очень важно, что люди поняли: когда предметов очень много, их удобнее при подсчёте объединять в группы и обозначать количество таких групп. При этом у каждого человека есть простой инструмент для такого способа подсчёта — его руки.

Например, о количестве узелков на этом ремешке можно было бы сказать так: *пять раз пальцы руки и ещё четыре пальца, то есть пять групп по пять и ещё четыре узелка.*



Или так:



два раза пальцы обеих рук и ещё девять пальцев, то есть *две группы по десять и ещё девять узелков.*

Можно считать и другими группами. В разные времена для разных целей при подсчётах использовались

## Натуральные числа

группы по две единицы (такая система применяется в компьютерах), по восемь, по двенадцать, по шестнадцать и даже по шестьдесят.

Например, если мы будем считать группами по восемь, то о числе этих узелков можно сказать так: *три группы по восемь и ещё пять.*



Вы хорошо знаете, что для обозначения результатов подсчёта, для обозначения чисел пользуются не только словами, но и специальными знаками — *цифрами*.

Раньше они отличались от привычных нам символов. Например, для обозначения пяти предметов (пяти единиц) применялись такие знаки:



(Попробуйте самостоятельно узнать, какие народы придумали каждый знак.)

Сейчас во всем мире для записи чисел используют 10 цифр, которые называют *арабскими*:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

## Подведём итоги

1. Для записи чисел используют специальные знаки — цифры. Одно и то же число может быть представлено разными способами, в зависимости от того, какие группы выбраны для подсчёта единиц. Группы подсчитываются так же, как и отдельные единицы.



### Проверь себя

1. Что в нашей речи и быту напоминает о том, что раньше при подсчёте предметов использовали группы по 12 и по 60 единиц?
2. Запишите результаты подсчёта узелков на ремешке, о котором шла речь в тексте параграфа, если при подсчёте использовали группы по 9 единиц. Сделайте соответствующий рисунок.
3. Результаты подсчёта предметов записаны так: 4 группы и 3 единицы. Сколько было предметов, если их объединяли в группы:
  - а) по 5 единиц; б) по 8 единиц; в) по 16 единиц?

## § 2. Позиционные системы счисления

Рассмотрим особенности записи чисел с помощью объединения единиц в группы.

Запишем результаты подсчёта количества узелков на ремешке при объединении их в группы различными способами:



группы по десять:	29
группы по восемь:	35
группы по двенадцать:	25

*(Объясните, что означает каждая цифра в этих записях. Выполните рисунки для каждой записи.)*



Обратите внимание, что *цифру, которая означает количество групп, записывают левее цифры, которая означает количество отдельных единиц.*

Рассмотрим сначала первую запись, которую следует читать так: 2 группы по десять и 9 единиц.

Добавим ещё одну единицу. Получается 2 группы по десять и ещё десять единиц, которые теперь тоже можно объединить в группу. То есть мы имеем ровно 3 группы.

Как записать такое число? Написать просто 3 нельзя, потому что это будет означать только три единицы. Нужно, чтобы по записи было понятно, что цифра 3 означает именно количество групп, а не количество отдельных единиц. Необходимо записать цифру 3 левее места для цифры единиц. Но у нас не осталось отдельных единиц, чем же занять это место?

Здесь нам поможет особая цифра 0 (*нуль*, или *ноль*), которую мы поставим на это «незанятое» место для единиц. Получится запись: 30. Она означает, что мы имеем ровно 3 группы по десять, а отдельных единиц здесь нет.

Итак, если считать узелки на ремешке группами по десять единиц, то их число записывается так: 29.

*Теперь попробуем считать узелки по-другому — группами по 8.*

В этом случае для записи любого числа будет достаточно всего восьми цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7.

В самом деле:

- 1) семь единиц можно записать просто как 7;
- 2) восемь единиц уже можно объединить в группу: получится 1 группа и 0 единиц, то есть можно сделать запись: 10. Однако по такой записи видно, что в числе ровно одна группа, но не понятно, сколько единиц объединяется в группу. Поэтому к записи числа приписывают снизу маленькую восьмёрку:  $10_8$ ;
- 3) из девяти единиц получится 1 группа по восемь и 1 единица, то есть можно сделать запись  $11_8$  и так далее.

Говорят, что числа  $10_8, 11_8$  записаны в *восьмеричной системе счисления* или в *системе счисления с основанием 8*.



Если считать группами по 8 единиц, то число узелков на ремешке запишется так:  $35_8$ .



**Итак, одно и то же число можно записать по-разному: в системах счисления с разными основаниями.**

Позиционная система счисления с основанием 10 называется десятичной или *десятичной системой счисления*. Сейчас она привычна для всех людей, поэтому при записи чисел в этой системе основание не указывается: вместо  $29_{10}$  пишут просто 29. Обратите внимание, что основание системы (которое изображается нижним индексом) записывается в десятичной системе и при рассмотрении других систем счисления.

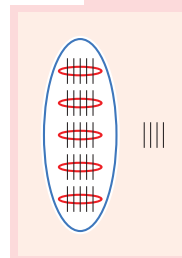
*Теперь рассмотрим счёт, при котором предметы объединялись в группы по 5, и связанную с этим запись чисел в пятеричной системе счисления.*

В системе счисления с основанием 5 используется только 5 цифр: 0, 1, 2, 3 и 4.

Запишем количество узелков на нашем ремешке в пятеричной системе.



Получаем 5 групп по пять узелков и ещё 4 узелка. Если 5 единиц мы объединяем в группу, то и 5 получившихся групп мы тоже должны объединить в группу. То есть получится: 1 группа, составленная из групп (назовём её *группой второго порядка*), обычных групп (назовём их *группами первого порядка*) нет и 4 единицы.



Для записи цифры, которая обозначит количество групп второго порядка, потребуется новое место (новая позиция) левее позиции для цифры групп первого порядка:

$$104_5.$$

### Для самых любознательных

*Теперь рассмотрим счёт группами по двенадцать — запись чисел в двенадцатеричной системе счисления.*

Системы счисления с основаниями больше десяти необычны — если в десятичной системе используется десять цифр, то для двенадцатеричной системы нужно больше цифр:

$$\begin{array}{cccccc}
 & | & || & ||| & |||| & ||||| \\
 0_{12} & 1_{12} & 2_{12} & 3_{12} & 4_{12} & 5_{12} \\
 ||||| & ||||| & ||||| & ||||| & ||||| & \\
 6_{12} & 7_{12} & 8_{12} & 9_{12} & & \\
 & & & & ||||| & \\
 & & & & ? & 
 \end{array}$$

Десять единиц мы ещё не можем объединить в группу (ведь сейчас мы считаем группами по двенадцать). Значит, нужно обозначить это количество единиц одной цифрой. Но нам потребуется новая цифра, ведь все известные арабские цифры уже использованы!

Принято вместо новой цифры использовать латинскую букву:

$$\begin{array}{c}
 ||||| \\
 A_{12}, \quad \text{то есть} \quad 10 = A_{12}
 \end{array}$$

Добавим ещё одну единицу — их стало одиннадцать. Этого всё ещё не достаточно для объединения в груп-

пу. Поэтому нам нужна ещё одна цифра:

$$\begin{array}{cccccccc} | & | & | & | & | & | & | & | \\ \hline & & & & & & & & \end{array} \quad \text{то есть } 11 = B_{12}$$

Больше новых цифр не потребуется. Двенадцать единиц мы уже можем объединить в группу:

$$\begin{array}{cccccccc} | & | & | & | & | & | & | & | \\ \hline & & & & & & & & \end{array} \quad \text{то есть } 12 = 10_{12}$$

Считаем дальше:  $13 = 11_{12}$ ,  $14 = 12_{12}$ ,  $15 = 13_{12}$ , ...,  $22 = 1A_{12}$ , ...,  $144 = 100_{12}$ . И так далее.

Таким образом, для записи чисел в двенадцатеричной системе счисления используются двенадцать цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B.

(Запишите числа 17, 36, 47 и 150 в двенадцатеричной системе счисления.)

Число узелков на нашем ремешке в двенадцатеричной системе запишется так:  $25_{12}$ .



*Мы записывали одно и то же число разными способами, однако все они имеют очень важную особенность — значение каждой цифры зависит от её места (позиции) в записи числа. Например,*

*в числе 13 цифра 3 означает 3 единицы, а в числе 31 — 3 группы по десять единиц (3 десятка).*

*Способы записи чисел, при которых значение каждой цифры зависит от её места (позиции) в записи числа, называются позиционными системами счисления.*

Сейчас позиционные системы счисления общеприняты, однако в некоторых ситуациях (например, для обозначения века, номера главы книги, часа на циферблате часов) иногда используют римскую систему счисления, которая не является позиционной.

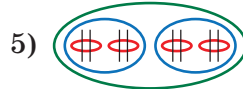
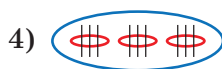
### Подведём итоги

1. Позиционная система счисления даёт возможность записывать любое число с помощью небольшого количества цифр. При этом значение каждой цифры зависит не только от её вида, но и от её места (позиции) в записи числа.
2. Одно и то же число можно по-разному записать в позиционных системах счисления с разными основаниями.



### Проверь себя

1. Какие цифры используются в системе счисления:
  - а) с основанием 6;
  - б) с основанием 3?
2. Количество предметов на рисунках представьте числами в разных (соответствующих) системах счисления:



3. Числа записаны следующим образом:

1)  $21_5$ ; 2) 13; 3)  $19_6$ ; 4)  $112_3$ .

Найдите и объясните ошибку в одной из записей.

4. Заполните таблицу, указав в клетках количество единиц в группе (для подсказки три клетки заполнены):

Вид группы	Основание системы счисления					
	2	3	5	8	10	12
группа I порядка	2					
группа II порядка		9				
группа III порядка			125			

5. Заполните таблицу, записав в пустые клетки числа в соответствующей системе счисления (за образец возьмите выделенную строку):

Основание системы счисления					
2	3	5	8	10	12
$10_2$	$2_3$	$2_5$	$2_8$	2	$2_{12}$
				7	
		$14_5$			
			$40_8$		
				22	
	$122_3$				
$10\ 100_2$					

6. Запишите число учеников в вашем классе в десятичной, пятеричной и двоичной системах счисления.

### Работаем с практикумом



**Задание 1.** Для каждого из чисел  $22_3$ ,  $24_5$ ,  $40_8$ ,  $198_{12}$  запишите число:

- следующее за ним в указанной системе счисления;
- предшествующее ему в этой системе счисления.

[ . . . ]